DST n$^{\text{o}}$4

Mathématiques - 25 Janvier 2025 - 4 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés. Le résultat d'une question ou d'un problème peut être admis dans les questions suivantes à condition de le mentionner explicitement.

Aucun document n'est autorisé, l'usage de la calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

*
* *

Ce sujet comporte 2 exercices et 1 problème tous indépendants.

Exercice 1

Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Dans tout l'exercice on note I la matrice identité de taille 4.

1. Calculer A^2.

2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $A^2 = aA + bI$.

3. Établir par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I$. On exprimera α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.

4. (a) Montrer que la suite (α_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

   (b) Déterminer l'expression de α_n en fonction de n.

   (c) En déduire l'expression de β_n en fonction de n.

5. (a) Prouver que A est inversible et exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et de I.

   (b) Les expressions trouvées à la question 4 pour α_n et β_n sont-elles encore valables pour $n = -1$?

6. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, B_n la matrice définie par :

$$B_n = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}\right] A + \frac{3}{8}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n-1}\right] I$$

   (a) Calculer $A^n \times B_n$.

   (b) Que peut-on en déduire ?

Exercice 2

Trois joueurs A, B et C s'affrontent simultanément dans un jeu qui se déroule en plusieurs manches. Pour chaque manche, il n'y a qu'un vainqueur possible.

A et B sont de même force et gagnent les manches chacun avec une probabilité de p (avec $0 < p < \frac{1}{2}$).

Le vainqueur de ce jeu est le premier joueur qui gagne deux manches consécutives.

1. Quelle est la probabilité de gain de C pour chaque manche ?

2. (a) Quelle est la probabilité pour A, pour B, et pour C de gagner le jeu à l'issue de la deuxième manche ?

   (b) Quelle est la probabilité que le jeu comporte au moins trois manches ?

   (c) Quelle est la probabilité que A gagne le jeu à l'issue de la troisième manche ?

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « le jeu n'est pas achevé avant la $n^{\text{ème}}$ manche et la $n^{\text{ème}}$ manche est gagnée par A. (respectivement par B pour B_n, par C pour C_n) **et le jeu continue** », et on note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

   (a) Calculer la probabilité des événement A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 et C_2.

(b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\begin{cases} a_{n+1} = p(b_n + c_n) \\ b_{n+1} = p(a_n + c_n) \\ c_{n+1} = (1-2p)(a_n + b_n) \end{cases}$

(c) En déduire que l'on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_n)$, puis en déduire $\mathbb{P}(C_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_n)$.

(d) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & p & p \\ p & 0 & p \\ 1-2p & 1-2p & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Vérifier qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_{n+1} = AX_n$$

4. Dans toute cette question, on suppose que $p = \dfrac{1}{5}$, et donc que $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et que son inverse est la matrice $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale.

(c) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

(d) En déduire une expression de a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

(e) En déduire b_n et c_n.

(f) Calculer la probabilité pour que le jeu ne soit pas achevé à l'issue de la $n^{\text{ème}}$ manche, et calculer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

On rappelle que pour tout entier naturel n et tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$ on a $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{1}{C_{n+p}^n} \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Le but de ce problème est d'étudier la nature de la suite (S_n) selon la valeur de p et de déterminer sa limite lorsqu'elle existe.

Les trois parties sont relativement indépendantes les une des autres si l'on admet les résultats précédents

Partie I

Dans cette partie, on étudier la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que la suite (H_n) est croissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.

   Indication : On pourra remarquer que pour tout $k \in \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$

3. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que (w_n) est une suite vérifiant $w_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et on définit la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad T_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$$

On souhaite montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$. Pour cela, on commence par fixer un réel $0 < \varepsilon < 1$.

4. Justifier qu'il existe un entier naturel n_0 tel que :

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{1-\varepsilon}{n} \leq w_n \leq \frac{1+\varepsilon}{n}$$

5. En déduire que pour tout $n > n_0$:

$$T_n \geq \sum_{k=1}^{n_0} w_k + (1-\varepsilon)(H_n - H_{n_0})$$

6. Conclure.

Partie III

On étudie maintenant la suite (S_n) définie dans le préambule.

7. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la suite (S_n) diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2

8. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}$.

   (b) En déduire par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1})$.

9. (a) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

   (b) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

   (c) Utiliser le résultat précédent pour montrer que la suite (S_n) converge et donner sa limite en fonction de p et de ℓ.

10. On suppose dans cette question seulement que $\ell \neq 0$.

    (a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$.

    (b) En déduire une contradiction avec la question 9.c).

11. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la limite de la suite (S_n).